# 退化系列表現のWhittaker模型(群の表現と調和解析の広がり)



大島, 利雄

数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 71-78



# 退化系列表現の Whittaker 模型

大島 利雄（東京大学 数理科学研究科）
Toshio OSHIMA

## §1 主要結果

このノートの話題は現在進展中であるが，簡単に述べられる主要結果の一つを述べたい．まず標準的な概念に関する記号を準備する．

$G$: 岩沢分解 $G=KAN$ をもつ実簡約 Lie 群（$G$ は連結，あるいは実連結簡約 Lie 群の放物型部分群の Levi 部分に同型な Lie 群とする）.
$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$: 対応する Lie 環の複素化

**定義**. $G$ の既約認容表現 $\pi\in\hat{G}_{ad}$ と $N$ の既約表現 $\varpi\in\hat{N}$ に対し，$\varpi$ から定義される誘導表現への表現 $\pi$ の埋め込み

$$\pi\hookrightarrow\mathrm{Ind}_N^G\varpi$$

を，$\pi$ の（$N$ の表現 $\varpi$ に付随した）**Whittaker 模型**と呼ぶ（主に $\varpi$ はユニタリの場合を考察する）.

$\Sigma(\mathfrak{g})$: 組 $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ に対するルート系．対応する Weyl 群を $W$ とおく．
$\cup$
$\Sigma(\mathfrak{g})^+$: $\mathfrak{n}$ に対する正のルートの集合
$\cup$
$\Psi(\mathfrak{g})$: 基本ルート系

$$\mathfrak{g}^\alpha:=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\mathrm{ad}(H)X=\alpha(H)X\ (\forall H\in\mathfrak{a})\}\quad\text{for }\alpha\in\mathfrak{a}^*$$

とおくと $\Sigma(\mathfrak{g})=\{\alpha\in\mathfrak{a}^*\setminus\{0\}\,;\,\mathfrak{g}^\alpha\neq\{0\}\}$.

$\Theta\subset\Psi(\mathfrak{g})$ に対し
$W_\Theta:=\langle s_\alpha\,;\,\alpha\in\Theta\rangle\subset W$, $W(\Theta):=\{w\in W\,;\,w\Theta\subset\Sigma(\mathfrak{g})^+\}$ とおくと，

$$W(\Theta)\times W_\Theta\xrightarrow{\sim}W\ :\ (w_1,w_2)\mapsto w_1w_2$$

という全単射ができる（$s_\alpha$ は $\alpha$ から定まる鏡映）.

$W(\Theta)$ は $W/W_\Theta$ の剰余類の代表系で長さが最小の元を選んだものとなっており，$w_1w_2$ の長さは $w_1$ の長さと $w_2$ の長さの和になる．

$P=MAN$: $G$ の極小放物型部分群（ただし $M=Z_K(\mathfrak{a})$）
$P_\Theta:=PW_\Theta P=M_\Theta A_\Theta N_\Theta=G_\Theta N_\Theta$ : $P$ を含む一般の放物型部分群

$M_\Theta A_\Theta N_\Theta$ は $P_\Theta$ の Langlands 分解で，$P_\Theta$ の **Levi 部分** $G_\Theta=M_\Theta A_\Theta$ は実簡約 Lie 群で，$\Psi(\mathfrak{g}_\Theta)=\Theta$ となる．特に，$P_\emptyset=P$，$P_{\Psi(\mathfrak{g})}=G$.

**定義**. Lie$(M)$ が $\{0\}$ のとき $G$ は **split** または **normal real form** であるといい（例：$GL(n,\mathbb{R})$，$Sp(n,\mathbb{R})$），可換なとき $G$ は **quasi-split** であるという（例：$GL(n,\mathbb{C})$，$SU(n,n)$）.

$G$ の閉部分群 $L$ の表現 $(\tau, V_\tau)$ に対し，$\tau$ から $G$ への**誘導表現** $\mathrm{Ind}_L^G\tau$ とは，$V_\tau$ に値をとる $G$ 上の関数 $f(g)$ で以下の条件を満たすものの作る空間に実現される $G$（または $\mathfrak{g}$）の表現のことと定義する．

$$f(gl) = \tau(l)^{-1}f(g) \qquad (\forall g \in G, \forall l \in L)$$

$L = P_\Theta$, $\lambda \in (\hat{G}_\Theta)_{\mathrm{ad}}$ に対し，$P_\Theta = G_\Theta N_\Theta$ という分解に応じて $\tau = \lambda \otimes 1 \in \hat{P}_\Theta$ としたときの誘導表現を（広い意味での）**主系列表現**といい，$\mathrm{Ind}_{P_\Theta}^G\lambda$ と表す．特に $\emptyset \neq \Theta \subsetneqq \Psi(\mathfrak{g})$ のとき**退化**（主）**系列表現**，$\Theta = \emptyset$ すなわち $P_\Theta = P$ のときを（連続）**主系列表現**という．

**定理**. i) $\lambda \in \hat{G}_\Theta$ と $\varpi \in \hat{N}$ は

$$\dim\lambda < \infty, \quad \dim\varpi = 1$$

を満たすとする．$\lambda|_{A_\Theta}$ が generic ならば

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathrm{Ind}_{P_\Theta}^G\lambda, \mathrm{Ind}_N^G\varpi) = \#W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta)\cdot\#W_{\mathrm{supp}\varpi}\cdot\dim_M\lambda$$

$$\dim \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\mathrm{Ind}_{P_\Theta}^G\lambda, \mathrm{Ind}_N^G\varpi) = \#W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta)\cdot\dim_M\lambda \ (\Leftarrow \lambda \text{ はユニタリ})$$

ここで，前者は $(\mathfrak{g}, K)$-加群としての埋め込み，後者は緩増加な埋め込みを意味し

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}\varpi &:= \{\alpha \in \Psi(\mathfrak{g})\,;\,\varpi(\mathfrak{g}^\alpha) \neq \{0\}\}\\
W(\Upsilon, \Theta) &:= \{w \in W(\Upsilon)\cap W(\Theta)^{-1}\,;\,w\Sigma(\mathfrak{g}_\Upsilon)\cap\Sigma(\mathfrak{g}_\Theta) = \emptyset\}\\
\dim_M\lambda &:= \text{最高ウェイトが } \lambda \text{ と同じ } G_\emptyset = MA \text{ の有限次元表現の次元}
\end{aligned}$$

ii) $\mathrm{supp}\varpi = \Psi(\mathfrak{g})$ のとき $\varpi$ が**非退化**と定義すると，この "Whittaker 模型の $K$-有限ベクトルの $A$ への制限" は，"$G_{\mathrm{supp}\varpi}$ の非退化 Whittaker 模型の $(G_{\mathrm{supp}\varpi}\cap K)$-有限ベクトルの $A$ への制限" になる．

**注意 1**. i) $G$ 上の関数 $f(g)$ が**緩増加**とは，$W$-不変な $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を固定したとき，以下が成立する $C, m > 0$ が存在すること．

$$|f(ke^Hk')| \leq C\exp m\langle H, H\rangle^{\frac{1}{2}} \quad (\forall k, k' \in K, \forall H \in \mathfrak{a})$$

埋め込みが緩増加とは，埋め込まれた $K$-有限ベクトルが緩増加となること（Whittaker 模型の場合は $A$ 上のみでの $|f(e^H)|$ の評価と同値）．

ii) $\dim\varpi = 1$ を満たす $\varpi \in \hat{N}$ の全体は，$\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ の双対空間，よって $\sum_{\alpha\in\Psi(\mathfrak{g})}\mathfrak{g}^\alpha$ の双対空間とみなせる．

iii) $$W(\Theta, \Upsilon) = W(\Upsilon, \Theta)^{-1}$$

iv) $W(\Upsilon, \Theta)$ は，両側剰余類の集合 $P_\Theta\backslash G/P_\Upsilon$ の部分集合に対応する．

v) $M$ が**可換**ならば $\dim_M\lambda = 1$.

vi) $\dim\varpi = \infty$ の場合に関しては，例えば [Ya] を参照．

## §2 例

**例 1**. $\underline{\mathrm{supp}\varpi = \emptyset}$ ($\Rightarrow$ 連続主系列表現への埋め込みに対応)
$W(\mathrm{supp}\varpi) = W$ で $W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta) = W(\Theta)^{-1}$ となる．特に，埋め込みは全て緩増加になる（$\#W_{\mathrm{supp}\varpi} = 1$）.

$\underline{\Theta = \emptyset}$ のとき，$P_\Theta = P$, $W(\Theta) = W$, $W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta) = W$ となり，連続主系列表現から連続主系列表現への埋め込みを考えることになり，$\lambda|_A$ が generic なときは，それは $\#W$ 個の連続主系列の間の標準 intertwining operators から得られる.

さらに $\underline{G\text{ がコンパクト}}$ なとき，$M = G$ で，結果は Peter-Weyl の定理に対応する.

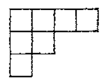
$\underline{\text{一般の } \Theta \text{ のとき}}$．まず退化主系列表現を主系列表現に標準的に埋め込み，そこからの $\#W(\Theta)$ 個の連続主系列間の標準 intertwining operators から埋め込みが得られる.

**例 2**. $\underline{\varpi\text{ が非退化の場合}}$. ($\Rightarrow$ 多くの研究がなされている：[Slk], [Ko], [Ha], [GW], [Ma3], [Ma4]，織田孝幸氏のグループによる計算 [織田] etc.)
$W_{\mathrm{supp}\varpi} = W$ なので $W(\mathrm{supp}\varpi) = \{e\}$, $\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathrm{supp}\varpi}) = \Sigma(\mathfrak{g})$.
よって $W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta) \neq \emptyset \Rightarrow \Theta = \emptyset$ となり $W(\mathrm{supp}\varpi, \emptyset) = \{e\}$.

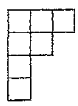
**例 3**. $\underline{G = GL(n, \mathbb{R})}$. $\Theta$ は $n$ の分割，よって Young 図形が対応する.
一般に（$W$ が $A$ 型のとき），以下が成立する.

$\#W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta) = 1$
$\Leftrightarrow$ "$\mathrm{supp}\varpi$ と $\Theta$ は対応する分割が双対"（Young 図形の行と列の入れ替え）.

$\underline{G = GL(7, \mathbb{R})\text{ の例}}$：



$G_\Theta = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R}) \Rightarrow 7 = 2+4+1 = 4+2+1$：
このとき $\Theta = \{1, 3, 4, 5\}$ と表すことにする.



双対の分割は　$7 = (4+2+1)' = 3+2+1+1 \Rightarrow 2+1+3+1$:
$G_{\mathrm{supp}\varpi} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R}) \times GL(3, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R})$

$$
\begin{array}{ll}
n = 7 & \\
\quad = 2+4+1 & \\
\quad = 2+1+3+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|c|c|c|c|}
 & p'_3 & p'_1 & p'_2 & p'_4 \\
\cline{2-5}
\lambda_2 : n'_2 = 4 & 4 & 2 & 3 & 5 \\
\cline{2-5}
\lambda_1 : n'_1 = 2 & 1 & 0 \\
\cline{2-3}
\lambda_3 : n'_3 = 1 & 6 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\qquad
P_{2,4,1} = \begin{pmatrix} GL(2) & & \\ * & GL(4) & \\ * & * & GL(1) \end{pmatrix}
$$

$G_\Theta = GL(n'_1, \mathbb{R}) \times GL(n'_2, \mathbb{R}) \times \cdots$, $G_{\mathrm{supp}\varpi} = GL(p'_1, \mathbb{R}) \times GL(p'_2, \mathbb{R}) \times \cdots$ とし，Young 図形の箱が $(n'_i, p'_j)$ に対応するとき $(i, j)$ の辞書式順序の順に $0, 1, \ldots$ を箱の中に入れてある.

$K$-有限ベクトルの $A$ への制限は，次のように表せる.

$E_{2,4,1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) := \mathrm{Ind}_{P_{2,4,1}}^G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
$\mapsto E(\lambda_1, \lambda_2 + 1) \otimes E(\lambda_2 + 1) \otimes E(\lambda_1 - 2, \lambda_2, \lambda_3 + 1) \otimes E(\lambda_2 - 1)$

ここで$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$はそれぞれ$GL(2,\mathbb{R})$, $GL(4,\mathbb{R})$, $GL(1,\mathbb{R})$の既約有限次元表現のパラメータで，最高ウェイトと符号表現の組と見なせる．また$E(\lambda_1,\lambda_2)$は$(\lambda_1,\lambda_2)$でパラメトライズされる$GL(2,\mathbb{R})$の連続主系列表現のこととする．

$GL(p'_j,\mathbb{R})$に対しては，Young図形の$p'_j$に対応する列の$\lambda_i$を$i$の小さい順に並べ，そこが$(j,i)$の辞書式順序で$k$番目の時，$\lambda_i$に$(n'_i,p'_j)$の箱の数字を足して$k-1$を引いたものが上の$GL(p'_j,\mathbb{R})$の主系列表現$E(\cdots)$のパラメータとなる．

上は，$\mathrm{supp}\varpi$を$G_{\mathrm{supp}\varpi}=GL(2,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R})$の正の基本ルートの全体に取ったときの$\mathrm{Ind}_{P_{2,4,1}}^{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$のWhittaker模型において，$\#W(\mathrm{supp}\varpi,\Theta)=1$が成立し，$K$-有限ベクトルの$A$への制限は$G_{\mathrm{supp}\varpi}$の表現

$$E(\lambda_1,\lambda_2+1)\otimes E(\lambda_2+1)\otimes E(\lambda_1-3,\lambda_2,\lambda_3+1)\otimes E(\lambda_2-1)$$

の非退化Whittaker模型の場合に帰着されることを示している（この対応は，$W(\mathrm{supp}\varpi,\Theta)$の元から来ていることに注意).

$G=GL(n,\mathbb{R})$かつ$\#W(\mathrm{supp}\varpi,\Theta)=1$と仮定する．このとき
“Whittaker模型の$K$-有限ベクトルの$A$への制限がWhittaker関数で表せる”
$\Leftrightarrow$ “$G_{\mathrm{supp}\varpi}$が$GL(2,\mathbb{R})$と$GL(1,\mathbb{R})$のいくつかの直積になる”
$\Leftrightarrow$ “$P_\Theta$は，極大放物型部分群（または$G$自身）”

ここでの**Whittaker関数**とは，古典的な1変数のWhittaker関数（cf. [WW]）のこととする．

$P_\Theta$が極大放物型部分群のとき（すなわち，$G/P_\Theta$がグラスマン多様体の時）具体的に座標を使って表すと:
$x=(x_{ij})\in GL(n,\mathbb{R})$
$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$: $GL(n,\mathbb{C})$のLie環．$n$次の複素行列の空間とみなせる．
$E_{ij}$: $(i,j)$成分のみが1で残りの成分は0の$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$の元
$(E_{ij}\varphi)(x)=\frac{d}{dt}\varphi(xe^{tE_{ij}})|_{t=0}$, $E_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu j}}$,
$\mathfrak{n}=\sum_{1\le j<i\le n}\mathbb{C}E_{ij}$ （$n$次の下三角複素行列の全体）
$\varpi\big(\exp(\sum_{i>j}t_{ij}E_{ij})\big)=e^{\sqrt{-1}(c_1t_{21}+\cdots+c_{n-1}t_{n,n-1})}$
$\Theta=\{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1\}$ $(2\le 2k\le n)$, $P_\Theta=P_{k,n-k}$

このとき
“$\mathrm{Ind}_{P_{k,n-k}}^{G}(\lambda,\mu)$のWhittaker模型が存在する”
$\Leftrightarrow c_ic_{i+1}=c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_{k+1}}=0\quad(1\le i<n,\ 1\le i_1<\cdots<i_{k+1}<n)$

例えば，次のように置くと

$$\begin{cases} c_i=0 & (i=2,4,\ldots,2k,2k+1,2k+2,\ldots,n-1),\\ c_{2j-1}\neq 0 & (j=1,\ldots,k)\end{cases}$$

Whittaker 模型の $K$ 固定ベクトルの $A=\{\mathrm{diag}(e^{t_1},\ldots,e^{t_n})\}$ への制限は以下の微分方程式の解になる：

$$\begin{cases} E_i u = \mu u & (i = 2k+1, 2k+2, \ldots, n), \\ (E_{2j-1}+E_{2j})u = (\lambda+\mu-2j+k+1)u, \\ ((\frac{E_{2j-1}-E_{2j}}{2})^2 - (\frac{E_{2j-1}-E_{2j}}{2}) - c_{2j-1}^2 e^{2(t_{2j-1}-t_{2j})})u = \frac{\lambda-\mu-k+1}{2}(\frac{\lambda-\mu-k+1}{2}-1)u, \\ \quad \text{Here } j=1,\ldots,k, \quad E_\nu = \frac{\partial}{\partial t_\nu} \quad (\nu=1,\ldots,n). \end{cases}$$

容易に分かるように，この方程式の解空間の次元は $2^k$ となる．
緩増加な解は定数倍を除いてただ一つ存在し，以下の $GL(2,\mathbb{R})_+$ の計算から分かるように，それは第2種変形 Bessel 関数によって表せる (同様に $K$ 有限ベクトルは，Whittaker 関数によって表せる)．

**注意 2.** i) $G=GL(n,\mathbb{R})$ で $\dim\lambda=1$ のときは，$\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\mathrm{Ind}_{P_\Theta}^G\lambda)$ は [O2] によって具体的に計算されており (cf. 注意 3 iv))，それから直接計算により上に述べた結果を出すこともできる (cf. [O3])．
ii) （一般の $G$ に対する）$W(\Upsilon,\Theta)$ には，リー環のベキ零共役類が関連しており，特に Jordan 標準型を用いた [BC1], [BC2] の記述に関係が深い．

上記のような動径成分の満たす方程式は，以下のような計算から得られる：

$$\frac{d}{dt}\varphi\big(e^{tE_{ij}}\mathrm{diag}(e^{t_1},\ldots,e^{t_n})\big)\Big|_{t=0} = e_{j,i}\varphi\big(\mathrm{diag}(e^{t_1},\ldots,e^{t_n})e^{tE_{ij}}\big)\Big|_{t=0},$$
$$e_{j,i} = e^{t_i-t_j}$$

であるから，たとえば像の満たすべき方程式を $D\in U(\mathfrak{g})$ で表しておいて，$K$ の表現 $\tau$ に属する Whittaker 模型の元の場合はそれを

$$\begin{aligned} R = &\sum_{1\le i<j\le n}\big(e_{i,j}E_{ij} - e_{j,i}E_{ji} + \tau(E_{ij}-E_{ji})\big)U(\mathfrak{g}) \\ &+ \sum_{n\ge i>j+1\ge 2} U(\mathfrak{g})E_{ij} + \sum_{1\le i<n} U(\mathfrak{g})(E_{i+1i}+\sqrt{-1}c_i) \end{aligned}$$

を法として考えて，$U(\mathfrak{g}) \mod R$ で $U(\mathfrak{a})$ の元として $D$ を表せばよい．

無限小指標に対応する方程式で実行すると，非退化 Whittaker 模型の $K$ 固定ベクトルの場合は，有限戸田鎖に対する完全積分可能量子系が得られる（実際には全ての $D$ に対して計算しなくても，Casimir 作用素の場合の計算を行えば，[O4] に述べられている一意性から分かる)．

<u>$GL(2,\mathbb{R})_+$ の普遍被覆群の場合</u>

$GL(2,\mathbb{R})_+$（行列式が正の2次の実行列全体の Lie 群）の普遍被覆群 $G$ の場合の Whittaker 模型の $K$ 有限ベクトルの方程式を具体的に計算してみよう．

$U(\mathfrak{g})$ の中心は，以下の2つの元から生成される (cf. [O3])．

$$\mathrm{trace}\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix} = E_{11}+E_{22},\ \underset{\longrightarrow}{\det}\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}-1\end{pmatrix} = E_{11}E_{22}-E_{21}E_{12}-E_1.$$

$K$ の表現のパラメータを $\sqrt{-1}\ell$ で表すと（$G = GL(2,\mathbb{R})_+$ なら $\ell \in \mathbb{Z}$）

$$\mathrm{mod}\ (e_{2,1}^{-1}E_{12} - e_{2,1}E_{21} + \sqrt{-1}\ell)U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})(E_{21} + \sqrt{-1}c_1)$$

で考えればよいので，$E_1 = E_{11}$, $E_2 = E_{22}$ とおいて

$$E_1E_2 - E_{21}E_{12} = \tfrac{E_1+E_2}{2}\big(\tfrac{E_1+E_2}{2} - 1\big) - \tfrac{E_1-E_2}{2}\big(\tfrac{E_1-E_2}{2} - 1\big) - E_{12}E_{21}$$

に注意すると，$(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ でパラメトライズされた無限小指標に対応する方程式の動径成分は

$$\begin{cases} (E_1 + E_2)u = (\lambda + \mu)u, \\ \big(\tfrac{E_1-E_2}{2}(\tfrac{E_1-E_2}{2} - 1) - c_1^2e_{2,1}^2 - c_1\ell e_{2,1}\big)u = \tfrac{\lambda-\mu}{2}(\tfrac{\lambda-\mu}{2} - 1)u \end{cases}$$

となり，解 $u(t_1,t_2)$ は

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\frac{\lambda+\mu}{2}(t_1+t_2)}v(t_1 - t_2), \\ v''(x) - v'(x) - (c_1\ell e^x + c_1^2e^{2x})v(x) &= \nu(\nu-1)v(x) \quad (\nu = \tfrac{\lambda-\mu}{2}), \\ w''(s) - \big(c_1^2 + \frac{c_1\ell}{s} + \frac{\nu(\nu-1)}{s^2}\big)w(s) &= 0 \ \ \text{with } w(e^x) = v(x), \\ s = x_1x_2^{-1} \quad \text{with } &\big(\begin{smallmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{smallmatrix}\big) \in GL(2,\mathbb{R})_+,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0. \end{aligned}$$

と表せる（$w(s)$ は $(0,\infty)$ 上の関数であることに注意）．

この $w$ の方程式は原点を確定特異点に持ち，その特性根は $\nu$ と $1-\nu$ となる．この特性根の差が整数でないとき，すなわち $2\nu \notin \mathbb{Z}$ ならば原点の近傍での解には対数項が現れない．このことは，対応する無限小指標をもつ $\mathrm{Ind}_N^G\varpi$ の部分空間が重複度 2 の連続主系列の直和になることを意味する．一方 $2\ell \in \mathbb{Z}$ の場合は，一般には対数項が現れ，完全可約性が失われることを意味している．

$c_1 \neq 0$ のとき，$W(\pm 2c_1s) = w(s)$ とおくと，$W(s)$ は以下の **Whittaker の微分方程式**（cf. [WW]）の解となる．

$$W'' + \Big(-\frac{1}{4} \mp \frac{\ell}{2s} + \frac{\frac{1}{4} - (\nu - \frac{1}{2})^2}{s^2}\Big)W = 0.$$

この方程式は $\infty$ を不確定特異点とするが，$s \to +\infty$ で有界な解（実際は $\sim e^{-\frac{s}{2}}s^{\mp\frac{\ell}{2}}$ となる）は，以下の **Whittaker 関数**（cf. [WW]）で与えられる．

$$W_{\mp\frac{\ell}{2},\nu-\frac{1}{2}}(s) = \frac{z^{\mp\frac{\ell}{2}}e^{-\frac{s}{2}}}{\Gamma(\nu \pm \frac{\ell}{2})}\int_0^\infty t^{\nu\pm\frac{\ell}{2}-1}e^{-t}\Big(1 + \frac{t}{s}\Big)^{\nu\mp\frac{\ell}{2}-1}dt.$$

$\pm c_1 > 0$ のとき，Whittaker 模型の緩増加な $K$ 有限ベクトルは，このようにして Whittaker 関数で表すことができる．

特に $\ell = 0$（すなわち $K$ 固定ベクトル）の場合は

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\pm c_1s) &= s^{-\frac{s}{2}}w(s), \\ \tilde{w}'' + \frac{\tilde{w}'}{s} - \Big(1 + \frac{(\nu - \frac{1}{2})^2}{s^2}\Big)\tilde{w} &= 0 \end{aligned}$$

によって，$\tilde{w}$ は**変形 Bessel 微分方程式**の解となる．この方程式の $s\to\infty$ で有界な解は，以下の $\nu-\frac{1}{2}$ 次の Macdonald 関数（第 2 種変形 Bessel 関数）のスカラー倍である．

$$K_{\nu-\frac{1}{2}}(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2s}}W_{0,\nu-\frac{1}{2}}(2s)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}(t+\frac{1}{t})}t^{-\nu-\frac{1}{2}}dt.$$

なお，$c_1=0$ のときの解は以下のようになる（$C_1, C_2\in\mathbb{C}$）．

$$v(x)=\begin{cases}C_1e^{\nu x}+C_2e^{(1-\nu)x} & (\nu\neq\frac{1}{2})\\ C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}} & (\nu=\frac{1}{2})\end{cases}$$

## §3 定理の証明におけるキーポイント

**1.** Whittaker 加群の既約性．

左 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$-加群

$$\begin{cases}(E_{11}+E_{22}-\lambda-\mu)v=0,\\ \big(E_{11}E_{22}-E_{12}E_{21}+E_{11}-\lambda(\mu+1)\big)v=0,\\ (E_{21}-c_1)v=0\end{cases}$$

は $c_1\neq 0$ ならば既約である (より一般の quasi-split 群のときは [Ko])．

**2.** 捻れ Harish-Chandra 準同型写像．

$\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{n}}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$: 複素簡約 Lie 群 ($G$ が normal real form の場合)
の分解に応じて，**捻れ Harish-Chandra 準同型写像**を定義する：

$$\gamma_\varpi: U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{a}),\ D\mapsto\gamma_\varpi(D)\quad\text{with}$$
$$D-\gamma_\varpi(D)\in\bar{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g})+U(\mathfrak{g})\textstyle\sum_{X\in\mathfrak{n}}\big(X-\varpi(X)\big)$$

**注意 3.** $I$: $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする．

i) $\gamma_\varpi(I)$ は可換環 $U(\mathfrak{a})$ のイデアルになる．

ii) $\quad \mathrm{supp}\varpi\subset\mathrm{supp}\varpi'\Rightarrow\gamma_\varpi(I)\subset\gamma_{\varpi'}(I)$

iii) $X_\alpha$ を $\mathfrak{g}^\alpha$ の（0 でない）元とする．

$$\mathrm{gr}(I)\text{ が }\textstyle\sum_{\alpha\in\mathrm{supp}\varpi}X_\alpha\text{ で消えなければ, }\gamma_\varpi(I)=U(\mathfrak{a}).$$

これは，次項と合わせて [Ma2] に対応する．

iv) $\gamma_\varpi\big(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\pi)\big)=U(\mathfrak{a})$ なら，$N$ の表現 $\varpi$ に付随する $\pi$ の Whittaker 模型は存在しない（ここで $\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\pi):=\{D\in U(\mathfrak{g})\,;\,\pi(D)=0\}$）．

v) より一般には次項 3. と関連し，$\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{n}}_\Theta+\mathfrak{g}_\Theta+\mathfrak{n}_\Theta$ に対して定義する．

**問題.** 一般の $\pi\in\hat{G}_{ad}$ に対し，$\gamma_\varpi\big(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\pi)\big)$ を求めよ．

**3.** $K_{\mathbb{C}}\times AN$ における境界値問題（cf. [GW], [O1], [Ma1]）

ある Weyl chamber（確定特異点方向）に対応する $\exp(\sqrt{-1}\mathfrak{t}+\mathfrak{a})$ の無限遠に付随する境界値を考察する．ここで $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{m}=Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ の極大トーラス．

**4.** 緩増加な Whittaker 模型の積分表示 (cf. [Slk], [Ko])

一般に Whittaker 模型の代数的埋め込みは，hyperfunction を核関数とする主系列表現からの積分変換で与えられるが，以下が成り立つ．

核関数が Schwartz 超関数 $\Leftrightarrow$ 緩増加 Whittaker 模型

なお，退化系列表現の緩増加な埋め込みを与える積分変換の核関数は Schwartz 超関数であるが，その台は内点を持つとは限らず，一般には退化した台をもつ．

$W(\mathrm{supp}\varpi, \Theta)$ は，台の可能性をパラメトライズしている．

## References


[BC1] P. Bala and R. W. Carter, *Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79**(1976), 401–425.

[BC2] ———, *Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80**(1977), 1–18.

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Whittaker vectors and conical vectors*, J. Funct. Anal. **39**(1980), 199–279.

[Ha] M. Hashizume, *Whittaker functions on semisimple Lie groups*, Hiroshima Math. J. **12**(1982), 259–293.

[Ko] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. **48**(1978), 101–184.

[Ma1] H. Matumoto, *Boundary value problems for Whittaker functions on real split semisimple Lie groups*, Duke Math. J. **53**(1986), 635–676.

[Ma2] ———, *Whittaker vectors and associated varieties*, Invent. Math. **89**(1987), 219–224.

[Ma3] ———, *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta. Math. **161**(1988), 183–241.

[Ma4] ———, *$C^{-\infty}$-Whittaker vectors corresponding to a principal nilpotent orbit of a real reductive linear Lie group and wave fronts sets*, Compositio Math. **82**(1992), 189–244.

[Slk] J. Shalika, *The multiplicity one theorem for $GL(n)$*, Ann. Math. **100**(1974), 171–193.

[O1] T. Oshima, *Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities*, Advanced Studies in Pure Math. **4**(1984), 391–432.

[O2] ———, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, Adv. in Math. **196**(2005), 124–146.

[O3] ———, 線形代数の量子化と積分幾何, 数理解析研究所講究録 **1421**(2005), 12–25.

[O4] ———, *Completely integrable systems associated with classical root systems*, preprint, math.ph/0502028.

[Ya] H. Yamashita, 半単純リー群の一般化された *Gelfand-Graev* 表現 — 有限重複度定理と表現の *Whittaker* 模型 —, **41**-2(1989), 140–153.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.

[織田] $Sp(2,\mathbb{R})$ と $SU(2,2)$ 上の保型形式 I, 数理解析研究所講究録 **909**(1995); —— II, ibid **1094**(1999); —— III, ibid **1421**(2005).